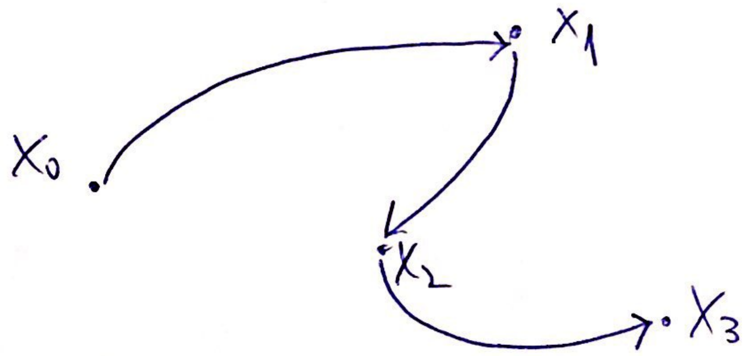
MODELO MATEMÁTICO EN DINÁMICA

EVOLUCIÓN EN EL TIEMPO:



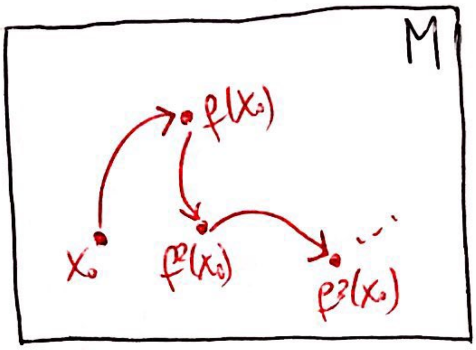
X_i = ESTADO EN EL TIEMPO i

TOMAMOS:

- M = ESPACIO DE FASE = CONJUNTO DE TODAS LAS POSIBLES CONFIGURACIONES DEL PROBLEMA
- $f: M \to M$ = EVOLUCION DE LAS CONFIGURACIONES APÓS 1 UNIDAD DE TIEMPO.

EN OTRAS PALAVRAS:

$$\underset{\text{TIEMPO } 0}{X_0} \xrightarrow{f} \underset{\text{TIEMPO } 1}{X_1 = f(X_0)} \to \cdots \to \underset{\text{TIEMPO } n}{X_n = f(X_0)} \to \cdots$$



VAMOS ENTENDER UM EJEMPLO CONCRETO: LA REPRESENTACIÓN BINÁRIA DE NÚMEROS REALES.

TOME $X \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$. ENTONCES PODEMOS ESCREBER UNICAMENTE

$$X = 0.\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots = \sum_{i\geq 1}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}, \quad \alpha_i\in\{0,1\}$$

PREGUNTA: COMO ENTENDER $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots$? COMO GENERAR-LO A PARTIR DE X?

GERACIÓN DE α_1. CONSIDERE $I_0=(0,1/2]$, $I_1=\left(\frac{1}{2},1\right]$.

$$\begin{cases} X\in I_0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ X\in I_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

GERACIÓN DE α_2. LA POSICIÓN DE X NON EN SUFICIENTE.

$$X = 0.\alpha_0\alpha_1\ldots$$
$$2X = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots$$

$$2x - \lfloor 2x \rfloor = 2x - \alpha_0 = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots$$

PORTANTO:

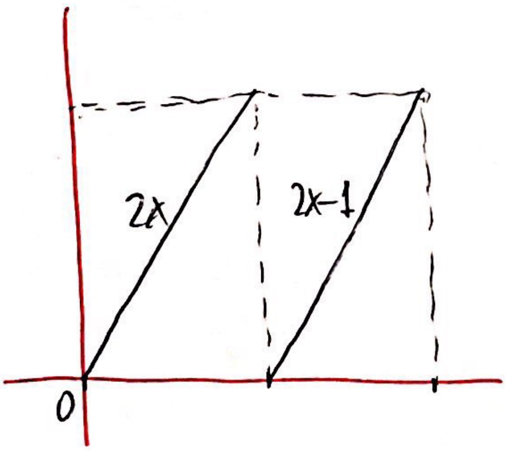
$$2x - \lfloor 2x \rfloor \in I_0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$2x - \lfloor 2x \rfloor \in I_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1.$$

<u>CONCLUSIÓN.</u> PODEMOS CONSIDERAR LA FUNCIÓN

$$f:[0,1]\to[0,1], \quad f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor,$$

PARA COMPREENDER α_1. SIMILARMENTE, PODEMOS COMPREENDER $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ A PARTIR DE LAS ITERACIONES DE f.

EL GRÁFICO DE f ES:



- $x \in (0, 1/2) \Rightarrow 2x - \lfloor 2x \rfloor = 2x - 0 = 2x$
- $x \in (1/2, 1) \Rightarrow 2x - \lfloor 2x \rfloor = 2x - 1.$

TEMOS $f'(x) = 2, \forall x.$

<u>EJERCICIO.</u> REPRESENTAR EL CONJUNTO DE $x \in (0,1)$ T.Q.

(a) $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$

(b) $\alpha_1 = 1$

(c) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$

DINÁMICA SIMBÓLICA PARA $2x$ (mód 1).

IDEIA: DESCREVER EL ITINERÁRIO $x, f(x), f^2(x), \ldots$ A PARTIR DE LOS INTERVALOS I_0, I_1.

INFORMACIÓN INICIAL: $x \in (0,1)$ NO NUMERABLE

$f(x) \in (0,1)$ NO NUMERABLE

$\vdots$ $\vdots$

INFORMACIÓN DESDE I_0, I_1: $x \in I_0$ O $x \in I_1$ DOS OPCIONES

$f(x) \in I_0$ O $f(x) \in I_1$ DOS OPCIONES

$\vdots$ $\vdots$

<u>CODIFICACIÓN</u>:

$$x \in (0,1) \rightsquigarrow a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0,1\} \text{ T.Q. } \begin{cases} x \in I_{a_0} \\ f(x) \in I_{a_1} \\ \vdots \\ f^n(x) \in I_{a_n} \end{cases}$$

EN OUTRAS PALABRAS, TEMOS PARA $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ LA FUNCIÓN

$$\begin{aligned} \pi : (0,1) &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \{a_i\}_{i \geq 0} \end{aligned}$$

ESO PERMITE ANALISAR f MÁS FACILMENTE.

$$
\begin{tikzcd}
x = 0.\alpha_0\alpha_1\dots \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & f(x) = 0.\alpha_1\alpha_2\dots \arrow[d, "\pi"] \\
\pi(x) = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots) \arrow[r, "\sigma"'] & \pi(f(x)) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots)
\end{tikzcd}
$$

DEFINIMOS $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ PELO SHIFT UNILATERAL:

$$\sigma(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots)$$

OLVIDA PRIMERA COORDENADA

TROCAMOS LA ANÁLISE DE $f:(0,1)\to(0,1)$ PELA ANÁLISE DE $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, UM OBJECTO PURAMENTE COMBINATÓRIO.

PROBLEMA POTENCIAL. CODIFICACIÓN NO ES INJECTIVA

$\Updownarrow$

MUCHOS PUNTOS CON EL MISMO CODIGO.

PARA VER QUE ESTE PROBLEMA POTENCIAL NO SUCEDE, VAMOS A CONSTRUIR UNA INVERSA PARA π.

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\theta} (0,1)$$

$$\theta(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots) = ?$$

EL PUNTO $x = \theta(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ DEBE SATISFACER

$$\begin{cases} x \in I_{\alpha_0} \\ f(x) \in I_{\alpha_1} \\ \vdots \\ f^n(x) \in I_{\alpha_n} \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I_{\alpha_0} \\ x \in f^{-1}(I_{\alpha_1}) \\ \vdots \\ x \in f^{-n}(I_{\alpha_n}) \\ \vdots \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_{\alpha_n})$$

NOTE : $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_{\alpha_n})$ = CONJUNTO DE PUNTOS CON LA MISMA CODIFICACIÓN $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$

NECESITAMOS MOSTRAR QUE LA INTERSECCIÓN ES UN ÚNICO PUNTO!

PARA ESO, UTILIZAREMOS UN TEOREMA DE ANÁLISIS.

<u>TEOREMA</u> (INTERSECCIÓN DE CANTOR) (X, d) ESPACIO METRICO COMPLETO. SI $F_0, F_1, \dots$ ES UNA SEQUENCÍA DE CERRADOS TAL QUE $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots$ Y $diam(F_n) \to 0$, ENTONCES $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ ES UN ÚNICO PUNTO.

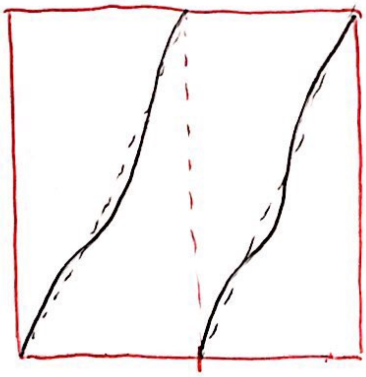
TOMAMOS

$$F_n = I_{\alpha_0} \cap f^{-1}(I_{\alpha_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{\alpha_n}).$$

NOTAMOS QUE $diam(F_n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ Y QUE $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$

PORTANTO $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_{\alpha_n}) = \bigcap_{n \geq 0} F_n$ ES UN ÚNICO PUNTO.

PREGUNTA. LO QUE PASA SI $f'(x) \approx 2$ PERO NON IGUAL A 2?



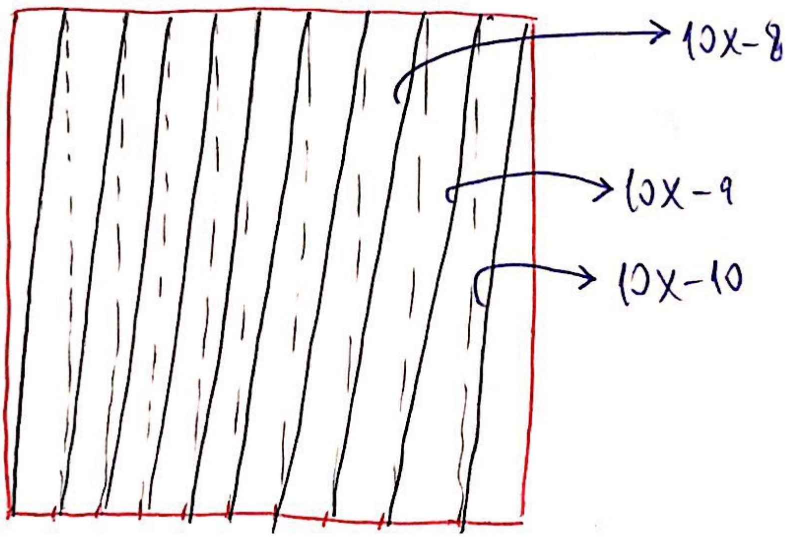
DINÁMICA SIMBÓLICA PARA $10x \pmod 1$

$$f(x) = 10x \pmod 1, \qquad f : (0,1) \to (0,1)$$

$$\Sigma = \{0,1,\dots,9\}^{\mathbb{N}}$$

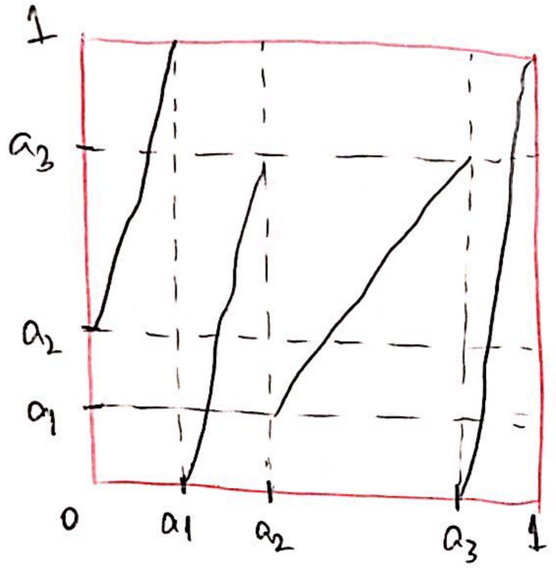
$$\sigma : \Sigma \to \Sigma$$

$$\theta(\alpha_0, \alpha_1, \dots) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_{\alpha_n}).$$



GENERALIZACIÓN

CONSIDERE EL SIGUIENTE EJEMPLO:



DOS OBSERVACIONES:

1. LA DERIVADA NON ES CONSTANTE (NON LINEAL)
2. LAS "RAMAS" NO CUBREN TODO EL INTERVALO.

ASUMIMOS APENAS QUE $|f'(x)| \geq \lambda > 1, \forall x \in [0,1]$.

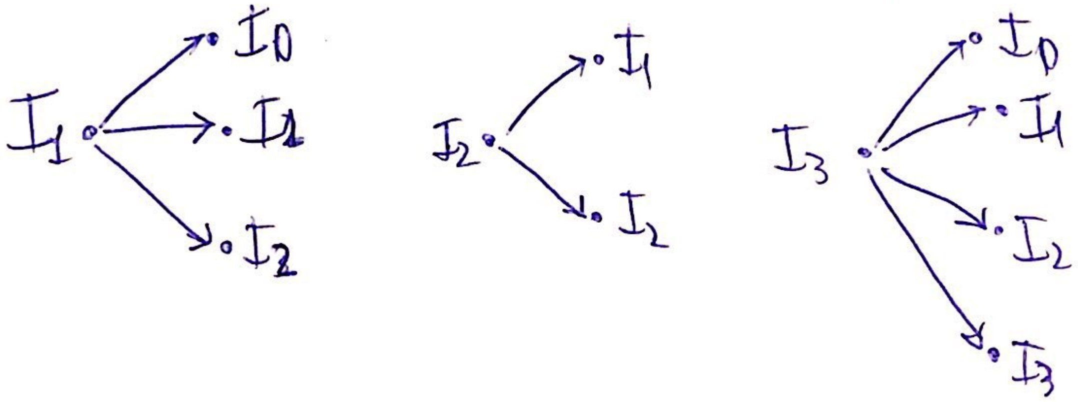
PARA CODIFICAR f, NECESITAMOS ENTENDER LAS POSIBLES TRANSICIONES. TOME:

$$\begin{cases} I_0 = (0, a_1) \\ I_1 = (a_1, a_2) \\ I_2 = (a_2, a_3) \\ I_3 = (a_3, 1) \end{cases}$$

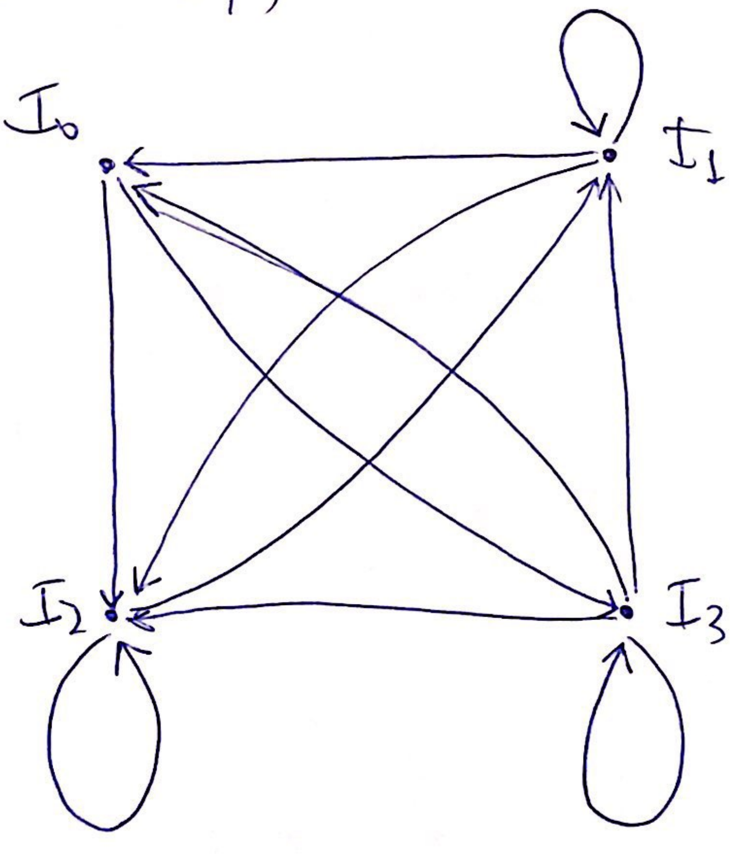
SI $x \in I_0$, ENTONCES $f(x) \in I_2$ O $f(x) \in I_3$, LUEGO HAY TRANSICIÓN DESDE I_0 A I_2 Y DESDE I_0 A I_3:

$$I_0 \to I_2, \quad I_0 \to I_3$$

HACEMOS LO MISMO PARA LOS INTERVALOS I_1, I_2, I_3:



PODEMOS REPRESENTAR TODAS LAS TRANSICIONES POR UM GRAFO ORIENTADO $G=(V,E)$:



LA IDEA ES REPRESENTAR TRAYECTORIAS DE f POR CAMINOS EN G.

DEFINICIÓN DE SHIFT DE MARKOV

SEA $G = (V, E)$ UN GRAFO ORIENTADO, COM V DENOMBRABLE.

ESPACIO DE FASE.

$$\Sigma = \{ \underbrace{\text{CAMIÑOS}}_{\text{EN } G} \text{ INDEXADOS POR } \{0,1,2,\dots\} \} =$$

$$= \{ (v_n)_{n \geq 0} : v_n \to v_{n+1}, \forall n \geq 0 \}$$

TRANSFORMACIÓN.

$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ SHIFT UNILATERAL

$$\sigma[(v_n)_{n\geq 0}] = (v_n)_{n \geq 1}.$$

SHIFT DE MARKOV. (Σ, σ) ES CHAMADO EL SHIFT DE MARKOV DEFINIDO POR G.

ES CON EL SHIFT DE MARKOV QUE CODIFICAMOS $f : (0,1) \to (0,1)$.

PARA DEFINIR LA CODIFICACIÓN, NECESITAMOS DE UNA TRANSFORMACIÓN $\pi : \Sigma \to (0,1)$ T.Q.

$$\pi[(v_n)_{n \geq 0}] = \text{PUNTO } x \text{ T.Q. } \begin{cases} x \in I_{v_0} \\ f(x) \in I_{v_1} \\ f^2(x) \in I_{v_2} \\ \vdots \end{cases}$$

LUEGO, NECESARIAMENTE

$$\{x\} = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I_{v_n}).$$

<u>PREGUNTA</u>. LA INTERSECCIÓN ES NO VACÍA?

SÍ, Y ESO ES LA PROPIEDAD DE MARKOV.

$\boxed{\text{PROPIEDAD DE MARKOV}}$

EN G, SI $\begin{matrix} V \to W \\ W \to U \end{matrix}$, ENTONCES $V \to W \to U$ (CONCATENACIÓN)

PARA QUE π SEA BIEN DEFINIDA, NECESITAMOS TAL PROPIEDAD PARA LA PARTICIÓN $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$:

SI $\begin{matrix} I_i \to I_j \\ I_j \to I_k \end{matrix}$ ENTONCES $I_i \to I_j \to I_k$.

EN EFECTO:

$$\begin{pmatrix} I_i \to I_j \\ I_j \to I_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} f(I_i) \supset I_j \\ f(I_j) \supset I_k \end{pmatrix} \to I_i \cap f^{-1}(I_j) \cap f^{-2}(I_k) \neq \emptyset,$$

ASÍ, SIEMPRE QUE $I_i \to I_j \to I_k$, ENTONCES HAY $x \in (0,1)$ T.Q. $\begin{matrix} x \in I_i \\ f(x) \in I_j \\ f^2(x) \in I_k \end{matrix}$.

EN GENERAL, SI $(r_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ ENTONCES

$$F_n = I_{r_0} \cap f^{-1}(I_{r_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(I_{r_n})$$

ES UNA FAMILIA NO VACIA DE CERRADOS $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots$

CON DIÁMETRO $\to 0$, LUEGO

$$\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(I_{r_n}) = \bigcap_{n\geq 0} F_n$$

ES UN ÚNICO PUNTO.

NON-INYECTIVIDAD. LOS ÚNICOS PUNTOS EN QUE π NO ES INYECTIVA SON LOS EXTREMOS DE LOS INTERVALOS I_0, I_1, I_2, I_3.

EJERCICIO. π NO PUEDE SER UN HOMEOMORFISMO.

EL CAT MAP

VAMOS A RECORDAR LA DEFINICIÓN DEL TORO $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$:

- $\mathbb{Z}^2$ ES UN RETICULADO DE $\mathbb{R}^2$.
- PODEMOS DEFINIR UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA $\sim$ EN $\mathbb{R}^2$ A PARTIR DE $\mathbb{Z}^2$:

$$v \sim w \iff v - w \in \mathbb{Z}^2.$$

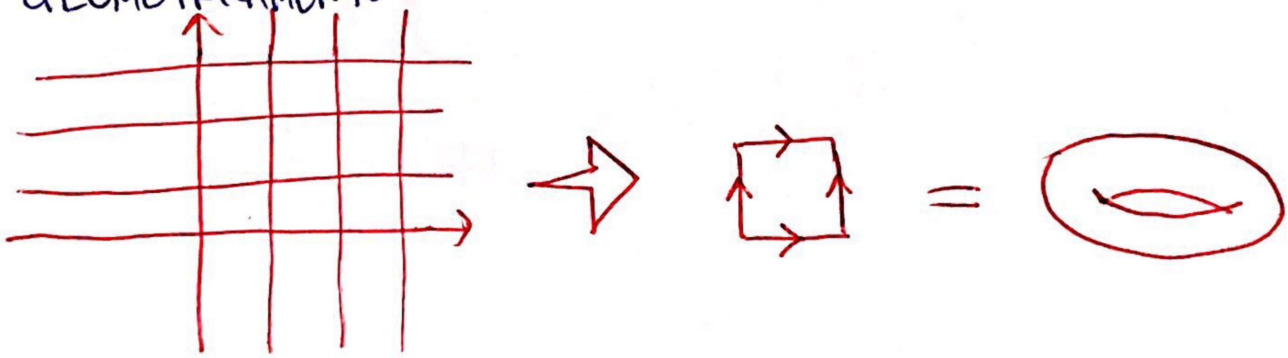
REFLEXIVIDAD: $v - v = 0 \in \mathbb{Z}^2 \to v \sim v$

SIMETRÍA: $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in \mathbb{Z}^2$
$\Leftrightarrow w - v \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow w \sim v$

TRANSITIVIDAD: $\begin{matrix} v \sim w \\ w \sim u \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} v - w \in \mathbb{Z}^2 \\ w - u \in \mathbb{Z}^2 \end{matrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow v - u \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow v \sim u$

- DEFINIMOS EL TORO $\mathbb{T}^2$ COMO EL COCIENTE $\mathbb{R}^2/\sim$, IGUAL AO CONJUNTO DE CLASES DE EQUIVALÊNCIA DE $\sim$. UTILIZAMOS LA NOTACIÓN $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, IDENTIFICANDO $\mathbb{Z}^2$ CON LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA $\sim$.

- GEOMÉTRICAMENTE:



- TEMOS LA PROJECIÓN $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$
$v \mapsto [v]$ = CLASE DE EQUIVALENCIA DE v POR $\sim$

AHORA VAMOS A DEFINIR EL CAT MAP. SEA $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, UNA MATRIZ 2×2 CON ENTRADAS ENTERAS Y DETERMINANTE IGUAL A 1:

$$A \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

COMO MATRIZ, A DEFINE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL EN $\mathbb{R}^2$, QUE TAMBIÉN DENOTAMOS POR A:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto Av = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v. \end{aligned}$$

PODEMOS PROYECTAR A PARA EL TORO $\mathbb{T}^2$, PUES: SI $v \sim w$, ENTONCES

$$v - w \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow A(v - w) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow Av - Aw \in \mathbb{Z}^2.$$

ASÍ, TENEMOS UNA TRANSFORMACIÓN, TAMBIÉN DENOTADA POR A, EN $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ [v] &\longrightarrow [Av] \end{aligned}$$

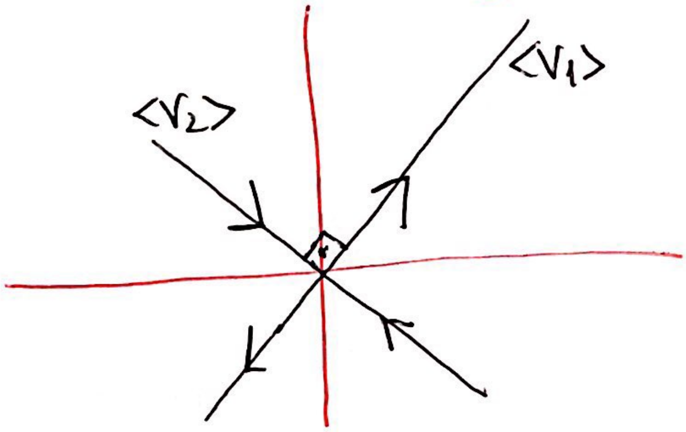
OBJECTIVO: CONTRUIR UN MODELO SIMBÓLICO PARA $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$.

EL SLIDE MUESTRA QUE LA DINÁMICA DE $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ ES COMPLICADA.

EN EFECTO, ESTAMOS VISUALIZANDO $\underline{A}$ CON RESPECTO A LOS EJES COORDINADOS X, Y, QUE NO SON LOS EJES CORRECTOS PARA ENTENDER LA EVOLUCIÓN DE $\underline{A}$.

$A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: AUTODIRECCIONES PUEDEN SER COMPUTADAS.

EJERCICIO: MUESTRE QUE $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ SON AUTOVALORES COM AUTODIRECCIONES $V_1=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}$ Y $V_2=\begin{bmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{bmatrix}$.

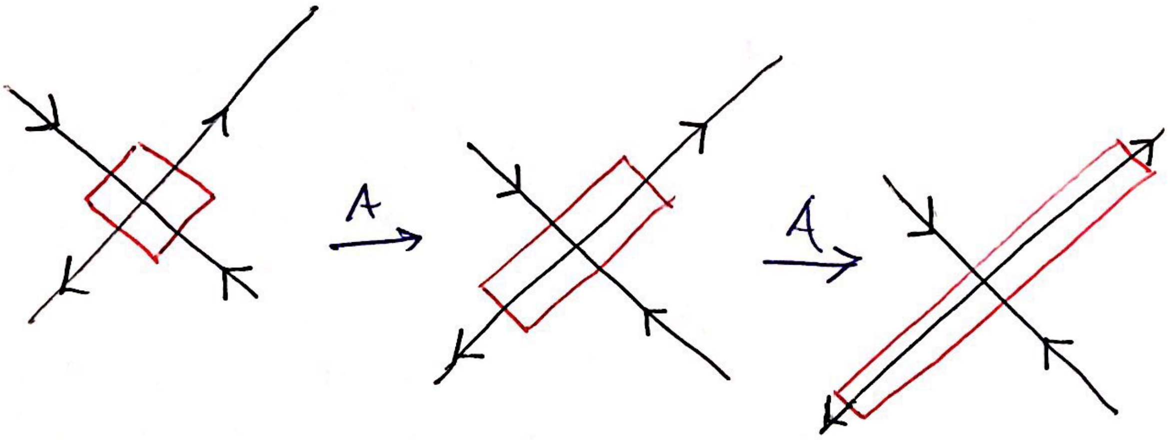


$V_1 \perp V_2$.

EN $\langle V_1\rangle$, TENEMOS $A^n V=\lambda_1^n V\longrightarrow+\infty$

EN $\langle V_2\rangle$, TENEMOS $A^n V=\lambda_2^n V\longrightarrow 0$.

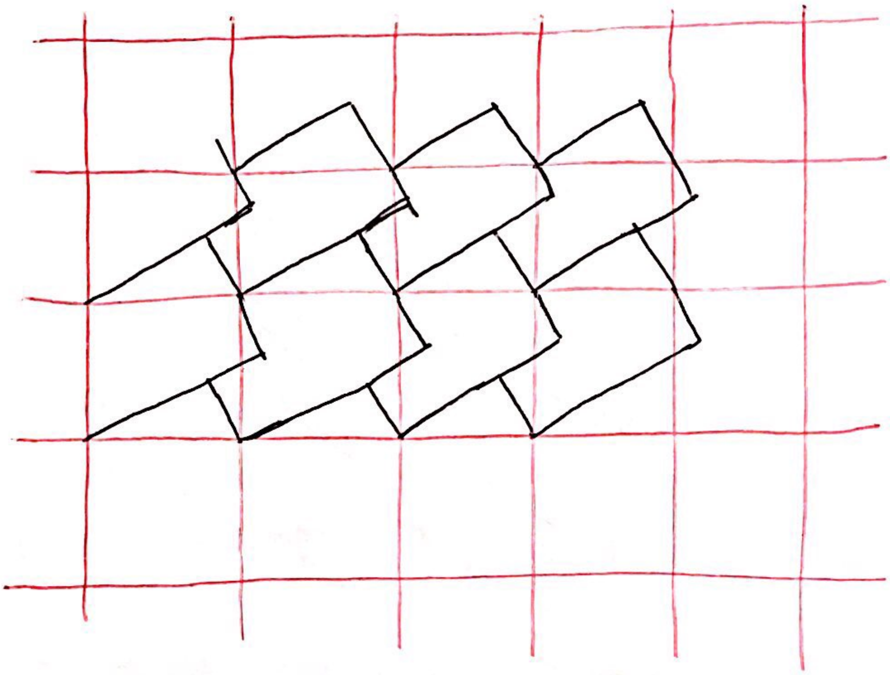
ENTONCES UN RECTÁNGULO EN ESTE SISTEMA DE COORDENADAS ES COMPRIMIDO EN ~~NA~~ DIRECCIÓN V_2 Y EXPANDIDO EN LA DIRECCIÓN V_1

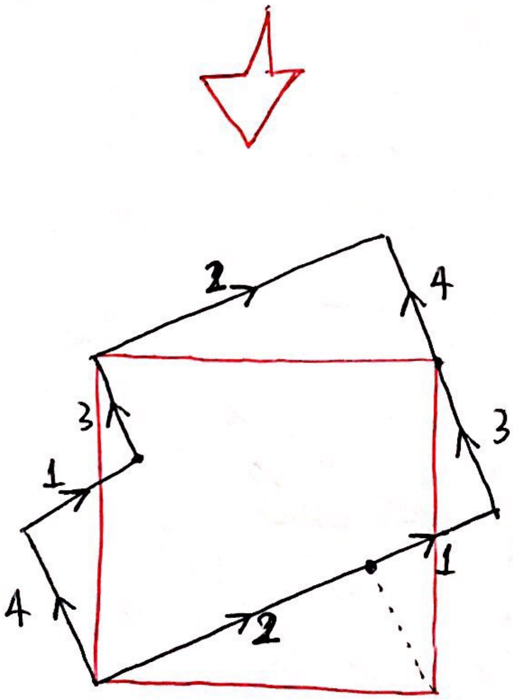


AL PROYECTAR EN $\mathbb{T}^2$, TENEMOS AUTO-INTERSECCIONES.

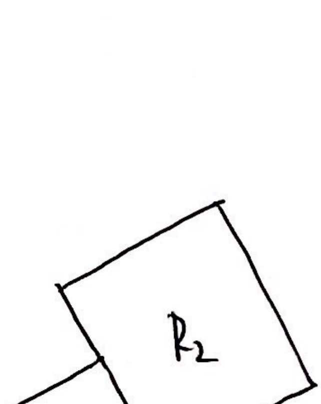
GRAN IDEA DE ADLER–WEISS. CONSTRUIR UN DOMINIO FUNDAMENTAL CON RECTANGULOS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS DAS AUTODIRECCIONES.

EL SLIDE MUESTRA COMO HACERLO:

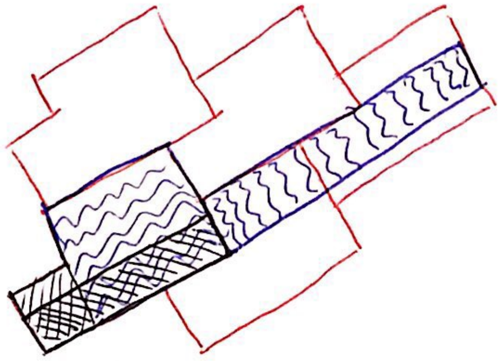




DIVIDIMOS EL DOMINIO EN DOS RECTANGULOS:



LA ACCIÓN DE LA MATRIZ $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ EN R_1, R_2 ES COMO ABAJO:

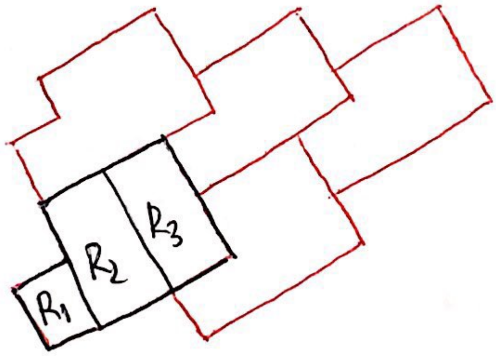


ENTONCES: AR_1 CRUZA R_1 Y R_2 UNA VEZ

AR_2 CRUZA R_1 UNA VEZ

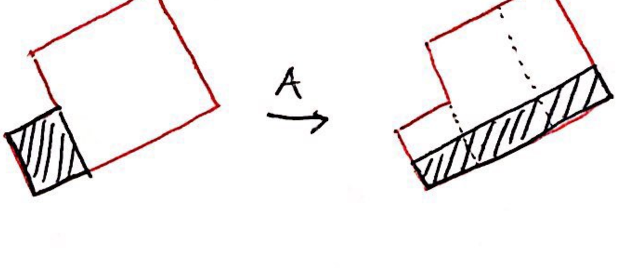
R_2 DOS VECES.

PARA EVITAR CRUZAMIENTOS MÚLTIPLOS, DIVIDIMOS R_2 EN DOS RECTÁNGULOS:



AHORA ES MÁS FÁCIL DE ENTENDER AR_1, AR_2, AR_3.

IMAGEN DE R_1:

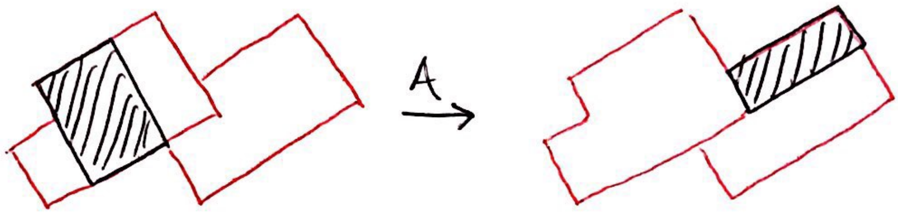


$R_1 \to R_1$

$R_1 \to R_2$

$R_1 \to R_3$

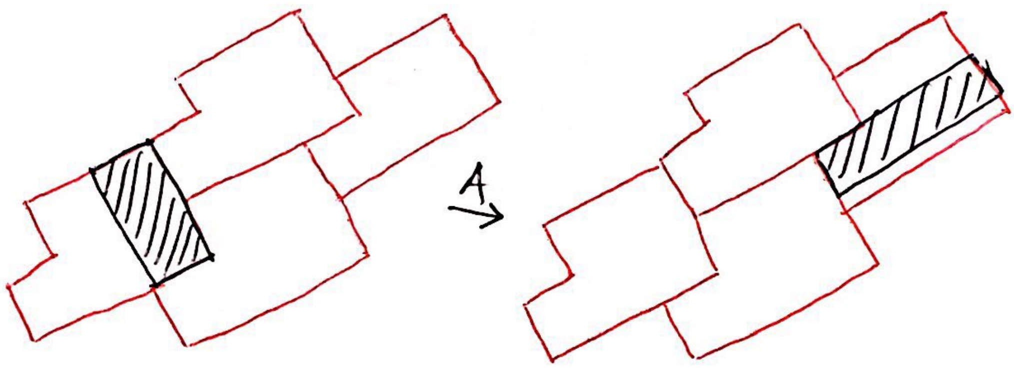
IMAGEN DE R_2:



$R_2 \to R_2$

$R_2 \to R_3$

IMAGEN DE R_3:

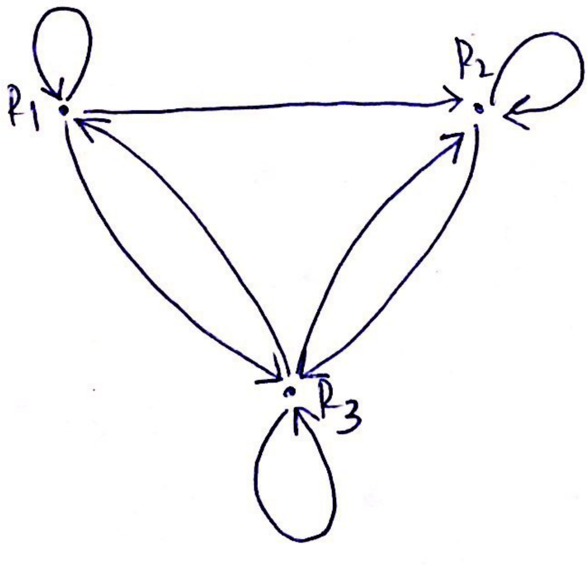


$R_3 \to R_1$

$R_3 \to R_2$

$R_3 \to R_3$

ASÍ, TENEMOS UN GRAFO CON LAS POSIBLES TRANSICIONES:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EN ESTE CASO, A ES INVERSIBLE, POR LO TANTO DEVEMOS CONSIDERAR TODOS LOS ITERADOS $A^n x$, $n \in \mathbb{Z}$, ASÍ COMO LO MISMO EN EL ESPACIO SIMBÓLICO.

$\boxed{\text{SHIFT DE MARKOV BILATERAL}}$

SE $G = (V, E)$ UN GRAFO ORIENTADO, CON V DENOMBRABLE.

ESPACIO DE FASE.

$$\Sigma = \{ \text{CAMIÑOS EN } G \text{ INDEXADOS POR } \mathbb{Z} \} = \{ (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} : v_n \to v_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{Z} \}$$

TRANSFORMACIÓN.

$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ SHIFT BILATERAL

$$\sigma \left[(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \right] = (v_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}} \, ,$$

$$\sigma (\ldots, v_0 ; v_1, v_2, \ldots) = (\ldots, v_0, v_1 ; v_2, v_3, \ldots)$$

σ TIENE INVERSA.

SHIFT DE MARKOV. (Σ, σ) ES CHAMADO EL SHIFT DE MARKOV BILATERAL DEFINIDO POR G.

DADO UN CAMIÑO $(R_{i_n})_{n \in \mathbb{Z}}$, TENEMOS QUE ASOCIAR UN PUNTO $x \in \mathbb{T}^2$ TALQUE $f^n(x) \in R_{i_n}$, DONDE

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{i_n}).$$

NOVAMENTE, TENEMOS QUE PROBAR QUE LA INTERSECCIÓN ES NO VACÍA.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{T}^2 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{T}^2
\end{tikzcd}$$

$$\pi\left[(R_{i_n})_{n\in\mathbb{Z}}\right] = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{i_n}).$$

$\boxed{\text{LA PROPRIEDAD DE MARKOV}}$

LA TRANSICIÓN EN EL GRAFO REFLETE LAS TRANSICIONES DE PUNTOS:

$$R \to S \iff f(R)\cap S \neq \emptyset.$$

ENTONCES, QUEREMOS PROBAR QUE:

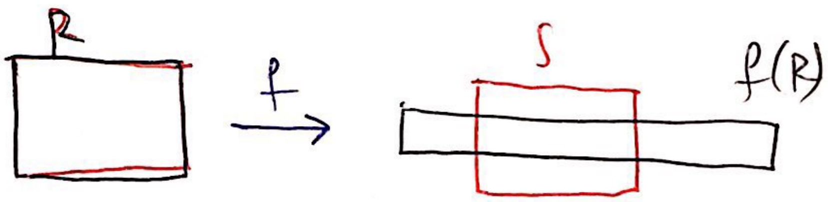
$$\begin{matrix} R \to S \\ S \to T \end{matrix} \Rightarrow R \to S \to T$$

$$\Updownarrow$$

$$f(R)\cap S \neq \emptyset \quad f(S)\cap T\neq\emptyset \;\rightarrow\; f^2(R)\cap f(S)\cap T \neq \emptyset .$$

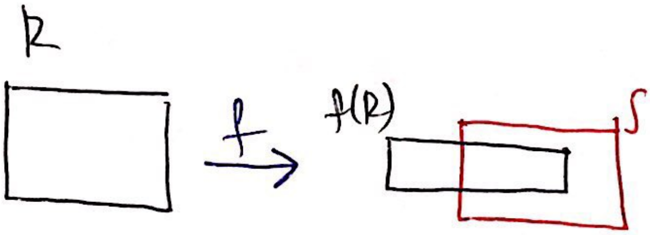
ESTO ES GARANTIZADO CON LA PROPRIEDAD DE MARKOV DE LOS RECTÁNGULOS:

$R \rightarrow S$

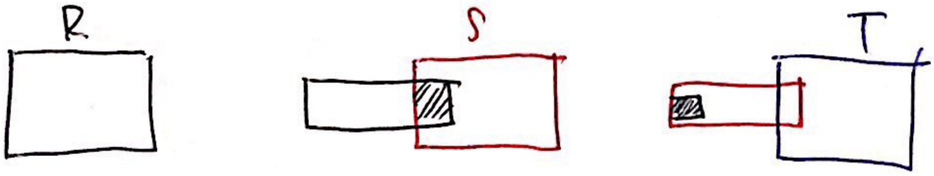


INTERSECION DE UN LADO AL OTRO

INTERSECCION PROIBIDA:



EN EFECTO, SI TENEMOS DOS INTERSECIONES $R\rightarrow S$, $S \rightarrow T$ COMO ACIMA, PODEMOS TENER $f^2(R)\cap f(S)\cap T\neq\emptyset$.



LA PROPRIEDAD DE MARKOV PERMITE CONCATENAR LAS ARISTAS DEL GRAFO, GARANTIZANDO QUE $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{i_n})\neq\emptyset$.

NOTE QUE

$$f^{n}(R_{i_n}) \cap \cdots \cap R_{i_0} \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{i_n})$$

ES PEQUEÑO EN LAS AUTODIRECCIONES, DONDE $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{i_n})$ ES UN PUNTO. CONSTRUIMOS, ASÍ, LA CODIFICATION:

$$\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{T}^2, \quad \pi\left[(R_{i_n})_{n\in\mathbb{Z}}\right] = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(R_{i_n}).$$